# Capitolul II

# ECUAȚII ȘI FUNCȚII SPECIALE

## § 1. FUNCȚIILE EULER Γ ȘI B

### 1. CÎTEVA TEOREME DIN TEORIA FUNCȚIILOR DE VARIABILĂ COMPLEXĂ

Vom da în cele ce urmează cîteva teoreme pe care le vom folosi în prezentarea teoriei funcțiilor speciale.

**Teorema 1** (teorema de unicitate). Dacă funcțiile $f_1$ și $f_2$ sînt analitice într-un domeniu $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ și dacă valorile lor coincid pe un șir de puncte $a_n$ care converge către un punct $a$ interior lui $\mathbb{D}$, atunci $f_1(z) = f_2(z)$ pe tot domeniul $\mathbb{D}$.

În particular funcțiile $f_1$ și $f_2$ coincid pe domeniul $\mathbb{D}$ dacă sînt anlitice pe $\mathbb{D}$ și dacă valorile lor coincid pe un segment oarecare conținut în $\mathbb{D}$.

În aplicațiile teoremei de unicitate un rol important îl are noțiunea de prelungire analitică.

Presupunem că funcția f este definită pe o mulțime $\mathbb{E} \subset \mathbb{D}$, $\mathbb{D}$ fiind un domeniu. Dacă funcția g este analitică în $\mathbb{D}$ și coincide cu f pe $\mathbb{E}$, spunem atunci că funcția g este prelungirea analitică a funcției f în domeniul $\mathbb{D}$.

Teorema de unicitate implică o propoziție importantă cunoscută sub denumirea de *principiul prelungirii analitice*:

Dacă mulțimea $\mathbb{E}$ conține cel puțin un punct limită interior lui $\mathbb{D}$, funcția $f(z)$ are o singură prelungire analitică în domeniul $\mathbb{D}$.

**Teorema 2** (analiticitatea integralei depinzînd de un parametru). Fie $C$ o curbă rectificabilă situată în planul complex al variabilei $\xi$ și $\mathbb{D}$ un domeniu în planul variabilei complexe $z$. Dacă funcția $f(z) : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ este definit și continuă în raport cu cele două variabile cînd $\xi \in \mathbb{C}$ și $z \in \mathbb{D}$, iar în raport cu $z$ este analitică în domeniul $\mathbb{D}$ pentru orice $\xi \in \mathbb{C}$, funcția

$$F(z) = \int_C f(\xi, z)\, d\xi$$

va fi analitică în domeniul $\mathbb{D}$ și

$$F'(z) = \int_C f'_z(\xi, z)\, d\xi$$

Teorema rămîne valabilă pentru integralele improprii uniform convergente. În cele ce urmează se foloseşte următorul criteriu de convergenţă uniformă a integralelor, analog cu criteriul lui Weierstrass de convergenţă uniformă de la serii.

Dacă pentru orice $\xi \in C$ şi $z \in D$ funcţia continuă f verifică inegalitatea

$$|f(\xi, z)| \leqslant \varphi(\xi)$$

şi integrala $\int_c \varphi(\xi)\,|d\xi|$ este convergentă, integrala $\int_c f(\xi, z)\,d\xi$ este uniform convergentă în raport cu $z$ pe domeniul **D**.

## 2. FUNCŢIA GAMMA

Funcţia gamma a lui Euler $\Gamma$ pentru $\operatorname{re} z > 0$ se defineşte prin integrala

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t}\, t^{z-1}\, dt \tag{1}$$

Integrala (1) converge uniform în raport cu $z$ în domeniul $0 < \delta \leqslant \operatorname{re} z \leqslant A$ oricare ar fi $A$ şi $\delta$. Pentru demonstrarea convergenţei integralei, folosim relaţia:

$$\Gamma(z) = \int_0^1 t^{z-1} e^{-t}\, dt + \int_1^{\infty} t^{z-1} e^{-t}\, dt \tag{2}$$

Ţinînd seama că

$$|t^{z-1} e^{-t}| = |e^{(z-1)\ln t}| = t^{\operatorname{re} z - 1} e^{-t}$$

avem

$$|e^{-t}\, t^{z-1}| \begin{cases} t^{\delta-1} & \text{pentru } 0 < t \leqslant 1 \\ e^{-t} t^{A-1} & \text{pentru } t > 1 \end{cases}$$

Integralele $\int_0^1 t^{-1}\, dt$ şi $\int_1^{\infty} e^{-t}\, t^{A-1}\, dt$ sînt evident convergente, astfel rezultă convegenţa uniformă a funcţiei $\Gamma$ definită prin integrala (1).

Pentru a obţine prelungirea analitică a funcţiei gamma în tot planul complex, folosim descompunerea (2). Funcţia $Q(z) = \int_1^{\infty} t^{z-1} e^{-t}\, dt$ converge uniform în orice parte finită a planului complex; deci funcţia Q este o funcţie întreagă. Se pune deci problema prelungirii analitice a funcţiei $P(z) = \int_0^1 t^{z-1} e^{-t}\, dt$. Presupunem în prima instanţă că $z > 1$ şi dezvoltăm în serie funcţia $e^{-t}$

$$e^{-t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^n}{n!} \tag{3}$$

obţinem o serie uniform convergentă pe intervalul [0, 1].

Înmulţind seria (3) cu $t^{z-1}$ putem să o integrăm termen cu termen pe intervalul [0, 1]. Se obţine

$$P(z) = \int_0^1 t^{z-1} \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^n}{n!}\right] dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 t^{n+z-1}\, dt =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{n+z}\,. \tag{4}$$

Seria care figurează în membrul drept al relației (4) este absolut și uniform convergentă în orice parte finită a planului complex care nu conține punctele $z=0, -1, -2, \ldots$, deoarece în domeniul $|z+n| \geqslant \delta > 0$, termenii seriei (4) sînt majorați de termenii seriei numerice convergente $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\delta} \cdot \frac{1}{n!}$. Termenii seriei (4) sînt funcții analitice în tot planul complex cu excepția punctelor $z=0, -1, -2, \ldots$, deci și suma seriei este analitică în tot planul complex cu excepția acestor puncte.

Formula

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \frac{1}{z+n} + \int_1^{\infty} e^{-t} t^{z-1}\, dt$$

ne permite prelungirea analitică a funcției $\Gamma$ în tot planul complex cu excepția punctelor $z=0, -1, -2, \ldots$, care sînt poli de ordinul întîi pentru funcția gamma.

### 3. FUNCȚIA BETA

Funcția beta a lui Euler $B$ se definește cu ajutorul integralei

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1}\, dt \tag{5}$$

pentru $\mathbf{Re}\, x > 0$, $\mathbf{Re}\, y > 0$. Pe baza teoremei 2 în domeniul considerat integrala (5) este convergentă și reprezintă o funcție analitică în raport cu ambele variabile $x$ și $y$.

Funcția beta se exprimă cu ajutorul funcției gama. Pentru a ajunge la această exprimare, generalizăm un procedeu bine cunoscut folosit la calculul integralei lui Poisson $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$. Avem

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1}\, dt = \int_0^{\infty} e^{-\xi^2} (\xi^2)^{x-1} \xi\, d\xi$$

de unde

$$\Gamma(x) \cdot \Gamma(y) = 4 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(\xi^2+\eta^2)} (\xi^2)^{x-\frac{1}{2}} (\eta^2)^{y-\frac{1}{2}}\, d\xi\, d\eta$$

În integrala dublă obținută facem schimbarea de coordonate polare:

$$\xi = r \cos\theta,\ \eta = r \sin\theta:$$

$$\Gamma(x)\,\Gamma(y) = 4 \int_0^{\infty} e^{-r^2} (r^2)^{x+y-1} r\, dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2\theta)^{x-\frac{1}{2}} (\sin^2\theta)^{y-\frac{1}{2}}\, d\theta =$$

$$= 2\,\Gamma(x+y) \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1}\, dt = 2\Gamma(x+y)\, B(x, y)$$

unde ultima integrală s-a obținut prin schimbarea de variabilă $\cos^2\theta = t$. Obținem astfel

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \tag{6}$$

Cu ajutorul relației (6) funcția $B$ poate fi prelungită pentru toate valorile complexe ale variabilelor $x$ și $y$.

## 4. RELAȚII FUNCȚIONALE PENTRU FUNCȚIILE Γ ȘI *B*

Funcția Γ satisface următoarele trei relații funcționale

$$\Gamma(z+1)=z\Gamma(z) \tag{7}$$

$$\Gamma(z)\,\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin \pi z} \tag{8}$$

$$2^{2z-1}\,\Gamma(z)\,\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(2z) \tag{9}$$

Relațiile de mai sus se scriu cu ajutorul funcției beta sub forma :

$$B(z,1)=\frac{1}{z} \tag{7'}$$

$$B(z,1-z)=\frac{\pi}{\sin \pi z} \tag{8'}$$

$$2^{2z-1}B(z,z)=B\left(\frac{1}{2},z\right) \tag{9'}$$

Relațiile (7′) și (9′) se pot obține prin calculul direct al funcției *B* cu ajutorul integralei (5). Pentru a putea extinde valabilitatea formulelor la valori arbitrare ale lui *z* recurgem la principiul prelungirii analitice.

Pentru demonstrarea formulei (7′), calculăm $B(z,1)$ pentru $\operatorname{Re} z>0$

$$B(z,1)=\int_0^1 t^{z-1}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{z}$$

care ne dă relația (6).

Pentru a demonstra relația (8′) presupunem că $0<z<1$ și calculăm $B(z,1-z)$ ; avem :

$$B(z,1-z)=\int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{-z}\,\mathrm{d}z=\int_0^1 \frac{1}{t}\left(\frac{t}{1-t}\right)^z \mathrm{d}t$$

Efectuînd schimbarea de variabilă $\frac{t}{1-t}=\sigma$, obținem

$$B(z,1-z)=\int_0^\infty \frac{\sigma^{z-1}}{1+\sigma}\,\mathrm{d}\sigma$$

Integrala obținută o calculăm cu ajutorul teoremei reziduurilor aplicată integralei pe curba *C* din planul complex reprezentată în figura 1, din funcția de variabilă complexă $f(\sigma)=\frac{\sigma^{z-1}}{1+\sigma}$. Această funcție are drept singularitate polul de ordinul întîi

$$\sigma=-1.$$

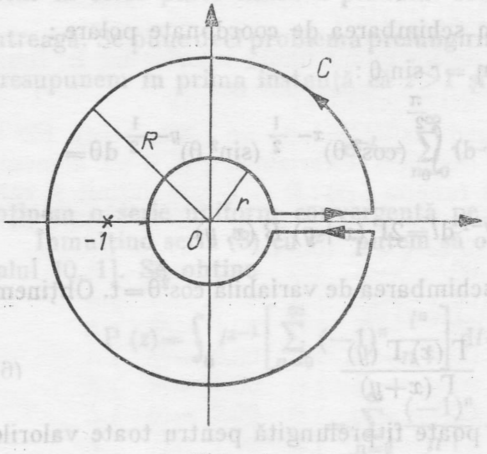


Fig. 1.

Obţinem:

$$\int_c f(\sigma)\, d\sigma = 2\pi i \operatorname{rez} f(1) = -2\pi\, i e^{i\pi z}$$

Descompunînd integrala pe conturul $C$ în:

$$\int_c f(\sigma)\, d\sigma = \int_r^R f(\sigma)\, d\sigma + \int_{|z|=R} f(\sigma)\, d\sigma + \int_R^r f(\sigma)\, d\sigma - \int_{|z|=r} f(\sigma)\, d\sigma,$$

pentru $R \to \infty$ şi $r \to 0$ integralele $\int_{|z|=R} f(\sigma)\, d\sigma$ şi $\int_{|z|=r} f(\sigma)\, d\sigma$ tind spre zero, şi obţinem:

$$(1-e^{2\pi i z}) \int_0^1 \frac{\sigma^{z-1}}{1+\sigma}\, d\sigma = -2\pi i e^{i\pi z}$$

de unde obţinem:

$$B(z, 1-z) = -2\pi i \frac{e^{i\pi z}}{1-e^{2\pi i z}} = 2\pi i \frac{1}{e^{\pi i z} - e^{-\pi i z}} = \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

Calculînd $B(z, z)$ cu formula (5) obţinem:

$$B(z, z) = \int_0^1 [t(1-t)]^{z-1}\, dt = \int_0^1 \left[\frac{1}{4} - \left(t - \frac{1}{2}\right)^2\right]^{z-1} dt =$$

$$= 2 \int_{\frac{1}{2}}^1 \left[\frac{1}{4} - \left(t - \frac{1}{2}\right)^2\right]^{z-1} dt,$$

funcţia $\frac{1}{4} - \left(t - \frac{1}{2}\right)^2$ fiind simetrică în raport cu $t = \frac{1}{2}$. Efectuînd schimbarea de variabilă $t - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{u}}{2}$, se obţine:

$$B(z, z) = \frac{1}{2^{2z-1}} \int_0^1 (1-n)^{z-1} n^{-\frac{1}{2}}\, dn = \frac{B\left(\frac{1}{2} z\right)}{2^{2z-1}}.$$

Din relaţiile funcţionale (7), (8), (9) se obţin cîteva proprietăţi ale funcţiei $\Gamma(z)$.

**Proprietatea 1.** Din relaţia (7) obţinem următoarea expresie pentru funcţia $\Gamma(z)$, cînd $z \in N$

$$\Gamma(n+1) = n! \tag{10}$$

Datorită acestei proprietăţi se vede că funcţia $\Gamma$ generalizează factorialul, numindu-se şi *funcţia factorial*. Relaţia (10) se obţine aplicînd formula (7) succesiv pentru $z = n, n-1, \ldots, 2$. Avem:

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$$

$$\Gamma(n) = (n-1)\,\Gamma(n-1)$$

$$\Gamma(n-1) = (n-2)\,\Gamma(n-2)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Gamma(2) = 1 \cdot \Gamma(1)$$

Prin înmulţirea acestor relaţii se obţine

$$\Gamma(n+1)=n\,!\,\Gamma(1)$$

Prin calcul direct se obţine $\Gamma(1)=1$.

**Proprietatea 2.** Din relaţia (8), pentru $z=\frac{1}{2}$, se obţine

$$\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2}}=\pi$$

de unde

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$

**Proprietatea 3.** Ca o consecinţă a relaţiei (8) avem proprietatea importantă că funcţia gamma nu se anulează în nici un punct al planului complex.

*Demonstraţie.* Proprietatea o demonstrăm prin reducere la absurd. Presupunem că există un punct $z_0 \in \mathrm{C}$, astfel încît $\Gamma(z_0)=0$. Evident că $z_0 \neq n$ $(n=1, 2, \ldots)$ deoarece $\Gamma(n)=(n-1)\,! \neq 0$. Pentru $z \neq n$, funcţiile $\Gamma(z)$ şi $\Gamma(1-z)$ sînt analitice deci şi pentru $z=z_0$. Pe de altă parte

$$\lim_{z\to z_0}\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin \pi z_0}\lim_{z\to z_0}\frac{1}{\Gamma(z)}=\infty$$

ceea ce contrazice analiticitatea funcţiei $\Gamma$ în punctul $z=1-z_0$

## 5. DERIVATA LOGARITMICĂ A FUNCŢIEI GAMMA

Cu ajutorul funcţiei gamma definim funcţia $\psi$ folosită în analiză prin:

$$\psi(z)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\ln\Gamma(z)=\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$$

Funcţia $\psi$ este analitică deci în toate punctele planului complex cu excepţia punctelor $z=0, -1, -2, \ldots$

Luînd derivatele logaritmice în relaţiile (7), (8) şi (9) obţinem următoarele relaţii funcţionale pentru funcţia $\psi$:

$$\psi(z+1)=\frac{1}{z}+\psi(z) \tag{11}$$

$$\psi(z)=\psi(1-z)-\pi\operatorname{cotg}\pi z \tag{12}$$

$$2\ln 2+\psi(z)+\psi\left(z+\frac{1}{2}\right)=2\psi(2z) \tag{13}$$

Din relația (11) obținem următoarele relații:

$$\psi(z+n)=\psi(z+n-1)+\frac{1}{z+n-1}$$

$$\psi(z+n-1)=\psi(z+n-2)+\frac{1}{z+n-2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\psi(z+1)=\psi(z)+\frac{1}{z}$$

de unde prin adunare obținem relația:

$$\psi(z+n)=\psi(z)+\sum_{R=1}^{n}\frac{1}{z+k-1} \tag{14}$$

Cu ajutorul relațiilor funcționale de mai sus putem calcula valorile funcției $\psi$ pentru cîteva valori particulare ale variabilei. Astfel

$$\psi\left(\frac{1}{2}\right)=\gamma-2\ln 2,$$

se obține din relația (13), înlocuind pe $z=\frac{1}{2}$ și folosind notația $-\gamma=\psi(1)=$ $=\Gamma'(1)=\int_0^{\infty}e^{-t}\ln t\,dt\cdot\gamma$ se numește constanta lui Euler, $=0{,}5772\ldots$

Înlocuind în formula (14) pe $z=1$ și apoi $z=\frac{1}{2}$, obținem:

$$\psi(n+1)=-\gamma+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

$$\psi\left(n+\frac{1}{2}\right)=-\gamma-2\ln 2+2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}$$

## § 2. POLINOAME ORTOGONALE CLASICE

### 6. DEFINIȚIA POLINOAMELOR ORTOGONALE

Fie funcția $\rho$, definită pe intervalul $(a, b)$ și nenegativă pe acest interval și familia de funcții reale $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbf{N}}\subset L^2_{\mathbf{R}}(a, b)$. Presupunem că există integralele $\int_a^b\varphi_n^2(x)\,\rho(x)\,\mathrm{d}x$. Definim produsul scalar a două elemente din familia $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ în raport cu ponderea $\rho$ prin:

$$<\varphi_m, \varphi_n>=\int_a^b\varphi_m(x)\,\varphi_n(x)\,\rho(x)\,\mathrm{d}x \tag{15}$$

(Pentru $\rho(x)\equiv 1$ vezi capitolul III).

**Definiția 1.** Familia de funcții $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ se spune că formează un sistem ortogonal în raport cu ponderea $\rho$ pe intervalul $(a, b)$ dacă avem

$$<\varphi_m, \varphi_n>=0 \text{ oricare ar fi } m\neq n$$

În legătură cu șirurile ortogonale de funcții se cunoaște următoarea proprietate :

**Proprietatea 4.** Orice șir ortogonal $\{\varphi_n\}_{n\in N}$ de funcții pe intervalul $(a, b)$ în raport cu ponderea $\rho$ cu $\rho(x)>0$ formează un sistem liniar independent.

*Demonstrația* acestei afirmații este imediată. Vom arăta că orice subsistem finit al familiei $\{\varphi_n\}_{n\in N}$ este liniar independent. Fie submulțimea $\{\varphi_{ki}\}$ $i=1,2,\ldots,p$ arbitrară a familei date și fie o combinație liniară nulă formată cu elementele acestei mulțimi. Avem :

$$\alpha_{k_1}\varphi_{k_1}(x)+\alpha_{k_2}\varphi_{k_2}(x)+\ldots+\alpha_{k_p}\varphi_{k_p}(x)=0 \text{ oricare ar fi } x\in(a, b)$$

Înmulțind relația de mai sus cu $\varphi_{ki}(x)\,\rho(x)$ și integrînd pe intervalul $(a, b)$ avem

$$\sum_{j=1}^{p}\alpha_{kj}\int_a^b \varphi_{kj}(x)\,\varphi_{kj}(x)\,\rho(x)\,dx=0$$

de unde

$$\alpha_{ki}\int_a^b \varphi_{ki}^2(x)\,\rho(x)\,dx=0 \quad \text{oricare ar fi } i=1, 2, \ldots, p$$

deci $\alpha_{ki}=0$ oricare ar fi $i=1, 2, \ldots, p$ ceea ce arată că mulțimea $\{\varphi_{ki}\}$ $i=\overline{1, p}$ formează un sistem liniar independent de funcții.

**Teorema 3.** Orice șir finit sau infinit de funcții liniare independente $\{\psi_n\}_{n\in N}$ poate fi ortogonalizat.

*Demonstrație.* Pentru a demonstra această teoremă dăm procedeul de ortogonalizare a unui șir de funcții $\{\psi_n\}_{n\in N}$ liniar independente. Se formează șirul de funcții $\{\varphi_n\}_{n\in N}$, unde

$$\varphi_0(x)=\psi_0(x)\,;\quad \varphi_n(x)=\sum_{k=0}^{n} C_{kn}\psi_{kn}(x),\ n>0,\ C_{nn}\neq 0 \tag{16}$$

coeficienții $C_{kn}$ se determină din condițiile :

$$<\varphi_n, \varphi_i>=0 \text{ oricare ar fi } i=0, 1, 2, \ldots, n-1 \tag{17}$$

Aceste condiții ne conduc la sistemul de ecuații liniare și omogene în necunoscutele $C_{kj}$

$$\sum_{k=0}^{n} C_{kj}<\psi_k, \varphi_j>=0\,;\qquad j=0, 1, \ldots, n, \ldots$$

Deoarece $C_{nn}\neq 0$, se pot exprima succesiv funcțiile $\psi_n$ cu ajutorul funcțiilor $\varphi_n$ prin

$$\psi_n(x)=\sum_{i=0}^{n} b_{in}\varphi_i(x) \qquad \left(b_{nn}=\frac{1}{C_{nn}}\neq 0\right)$$

Rezultă că orice combinație liniară de funcții $\psi_n$ poate fi reprezentată sub forma unei combinații liniare de funcții $\varphi_n$. Se poate arăta ușor că condițiile de ortogonalitate (17) sînt echivalente cu condițiile

$$<\psi_m, \varphi_n>=0 \qquad m<n \tag{18}$$

Înlocuind în aceste condiții funcțiile $\varphi_n(x)$ cu expresiile date de relațiile (16) obținem sistemul de ecuații liniare

$$\sum_{k=0}^{n} C_{kn} < \psi_m, \quad \psi_k > = 0 \quad m = 0, 1, \ldots, n-1$$

Dînd o valoare lui $C_{nn}$ rezultă că acest sistem are o soluție unică.

Se observă astfel că pentru un sistem dat de funcții liniar independente $\{\psi_i\}_{i\in N}$ în raport cu o pondere dată, $\rho$, există un șir de funcții ortogonale $\{\varphi_n\}_{n\in N}$ determinate pînă la un factor constant, care pot fi puse sub forma (16) și verifică condițiile de ortogonalitate (17).

7. POLINOAME ORTOGONALE

Considerăm șirul particular de funcții $\{\psi_n\}_{n\in N}$ unde $\psi_n(x) = x^n$, $n \in N$. Prin procedeul de ortogonalizare indicat mai sus se obține atunci un șir de polinoame $p_n$, $n \in N$, ortogonale în raport cu ponderea $\varphi$. Pentru aceste polinoame condițiile de ortogonalitate (17) și (18) se scriu sub forma :

$$\int_a^b p_n(x)\, p_m(x)\, \rho(x)\, dx = 0 \qquad m \neq n \tag{19}$$

$$\int_a^b p_n(x)\, x^m\, \rho(x)\, dx = 0 \qquad m < n \tag{20}$$

Din cele făcute la paragraful 2 punctul 1 rezultă următoarea proprietate a a polinoamelor ortogonale.

**Proprietatea 4.** Orice polinom de grad $n$ se poate scrie ca o combinație liniară de polinoame ortogonale $p_m(x)$ $(m=0,1,\ldots,n)$. Aceasta rezultă din faptul că polinomul $p_n(x)$ e ortogonal cu toate polinoamele de grad mai mic ca $n$.

4.8. PROPRIETĂȚI GENERALE ALE POLINOAMELOR ORTOGONALE

Pentru orice sistem de polinoame ortogonale $\{p_n(x)\}_{n\in N}$ are loc următoarea teoremă care stabilește o relație de recurență între trei polinoame consecutive ;

**Teorema 4.** Între trei polinoame consecutive arbitrare ale unui sistem ortogonal $\{p_n\}_{n\in N}$ există o relație de dependență liniară de următoarea formă :

$$x\, p_x(x) = \frac{a_n}{a_n+1}\, p_{n+1}(x) + \left(\frac{b_n}{a_n} - \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right) p_n(x) + \frac{a_{n-1}}{a_n}\, \frac{dn^2}{d^2_{n-1}}\, p_{n-1}(x) \tag{21}$$

unde $d_n^2 = \int_a^b p_n^2(x)\, \rho(x)\, dx$, reprezintă pătratul normei, iar $a_n$, $b_n$ sînt coeficienții termenilor de gradul $n$, respectiv $n-1$ din polinomul

$$p_n(x) = a_n x^n + b_n x^{n-1} \ldots \qquad (a_n \neq 0)$$

*Demonstrație*. Pentru demonstrație considerăm polinomul P, definit prin $P(x)=x p_n(x)$ de gradul $(n+1)$ și îl scriem pe baza proprietății 4 ca o combinație liniară de polinoamele $p_m$:

$$x p_n(x)=\sum_{m=0}^{n+1} C_{mn} p_m(x) \tag{22}$$

Înmulțind relația (22) cu $p_m(x)\rho(x)$ și integrînd pe $(a, b)$ obținem coeficienții:

$$C_{mn}=\frac{1}{dm^2}\int_a^b p_m(x)\, x\, p_n(x)\, \varphi(x)\, \mathrm{d}x \tag{23}$$

Rezultă atunci

$$dm^2 C_{mn}=dn^2 C_{nm} \tag{24}$$

Deoarece $C_{mn}=0$ pentru $m>n+1$, pe baza relației (24) rezultă și $C_{mn}=0$ pentru $m<n-1$. În acest caz relația (22) se reduce la

$$x p_n(x)=C_{n-1n}p_{n-1}(x)+C_{nn}\, p_n(x)+C_{nn+1}\, p_{n+1}(x) \tag{25}$$

Din identificarea coeficienților termenilor de gradul $n+1$ și $n$ rezultă relațiile:

$$a_n=C_{n+1n}\, a_{n+1} \qquad b_n=C_{n+1n}\, b_{n+1}+C_{nn}\, a_n$$

de unde avem coeficienții

$$C_{n+1n}=\frac{a_n}{a_{n+1}};\quad C_{nn}=\frac{b_n}{a_n}-\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}$$

Din relația (24) avem

$$C_{n-1n}=\frac{d_n^2}{d_{n-1}^2}C_{nn-1}=\frac{d_n^2}{d_{n-1}^2}\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

Înlocuind expresiile coeficienților $C_{n-1n}$ $C_{nn}$ $C_{n+1n}$ în relația (25) obținem relația care trebuia să o demonstrăm.

Din relația de recurență (21) rezultă imediat așa numita formulă a lui Darboux-Christoffel

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{p_k(x)\, p_k(y)}{d_k^2}=\frac{1}{d_n^2}\frac{a_n}{a_{n+1}}\frac{p_{n+1}(x)\, p_n(y)-p_n(x)\, p_{n+1}(y)}{x-y} \tag{26}$$

Pentru a obține formula de mai sus folosim relația de recurență (21):

$$xp_k(x)=\frac{a_k}{a_{k+1}}p_{k+1}(x)+\left(\frac{b_k}{a_k}-\frac{b_{k+1}}{a_{k+1}}\right)p_k(x)+\frac{a_{k-1}}{a_k}\frac{d_k^2}{d_{k-1}^2}p_{k-1}(x)$$

$$yp_k(y)=\frac{a_k}{a_{k+1}}p_{k+1}(y)+\left(\frac{b_k}{a_k}-\frac{b_{k+1}}{a_{k+1}}\right)p_k(y)+\frac{a_{k-1}}{a_k}\frac{d_k^2}{d_{k-1}^2}p_{k-1}(y);$$

Înmulţind prima relaţie cu $p_k(y)$ a doua cu $p_k(x)$ şi scăzîndu-le termen cu termen obţinem

$$(x-y)\frac{p_k(x)\,p_k(y)}{d_k^2}=\frac{1}{d_k^2}\,\frac{a_k}{a_{k+1}}\,[p_{k+1}(x)\,p_k(y)-p_k(x)\,p_{k+1}(y)]-$$

$$-\frac{1}{d_k^2}\,\frac{a_{k-1}}{a_k}\,[p_k(x)\,p_{k-1}(y)-p_{k-1}(x)\,p_k(y)]$$

Însumînd după $k$ de la 1 la $n$ şi ţinînd seama că $p_0(x)=p_0(y)=a_0$, $p_1(x)-p_1(y)=a_1(x-y)$ obţinem formula lui Darboux-Christoffel.

## 9. POLINOAME ORTOGONALE CLASICE. ECUAŢIA DIFERENŢIALĂ A PONDERII

**Definiţia 2.** Se numesc polinoame ortogonale clasice polinoamele $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ortogonale pe intervalul $(a, b)$ în raport cu ponderea $\rho$, pondere care verifică ecuaţia diferenţială:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\sigma(x)\,\rho(x)]=\tau(x)\,\rho(x) \tag{27}$$

**$\tau$ este un polinom de gradul întîi, iar $\sigma$ un polinom de grad cel mult doi, care pe intervalul $(a, b)$ are forma:**

$$\sigma(x)=\begin{cases}(x-a)(b-x) & \text{dacă } a, b \text{ sînt numere finite}\\ (x-a) & \text{dacă } a \text{ e finit, } b=\infty\\ (b-x) & \text{dacă } a=-\infty,\ b \text{ este finit}\\ 1 & \text{dacă } a=-\infty,\ b=+\infty\end{cases}$$

Ecuaţia diferenţială (27) nu are nici o singularitate pentru $x\in(a, b)$, funcţia pondere va fi deci o funcţie continuă, derivabilă în acest interval, care ar putea admite singularităţi eventual doar la capetele intervalului $(a, b)$.

Se poate arăta că ponderea $\rho$ pentru polinoamele ortogonale clasice verifică următoarele condiţii la capetele intervalului $(a, b)$;

$$x^m\sigma(x)\,\rho(x)\,|_{x=a,b}=0 \quad (m=0, 1, 2, \ldots) \tag{28}$$

Vom determina în continuare expresia funcţiei $\rho$ pentru polinoamele ortogonale integrînd ecuaţia diferenţială (27). Avem:

$$\frac{[\sigma(x)\rho(x)]'}{\sigma(x)\,\rho(x)}=\frac{\tau(x)}{\sigma(x)}$$

de unde

$$\rho(x)=\frac{1}{\sigma(x)}\,e^{\int\frac{\tau(x)}{\sigma(x)}\mathrm{d}x}$$

Ținînd seama de expresia funcției $\sigma$ după valorile luate de $a$ și $b$ obținem următoarea expresie a funcției $\rho$ :

$$\rho(x)=\begin{cases} (b-x)^{\beta}\,(x-a)^{\alpha}\ ; & \alpha=\dfrac{\tau(a)}{b-a}-1,\ \beta=-\dfrac{\tau(b)}{b-a}-1 \\ & (a,\ b \text{ finiți}) \\ (x-a)^{\alpha}\, e^{x\tau'(x)}\ ; & \alpha=\tau(a)-1 \qquad (a \text{ finit}\ ;\ b=+\infty) \\ (b-y)^{\beta}\, e^{-x\tau'(x)}\ ; & \beta=-\tau(b)-1 \qquad (a=-\infty,\ b \text{ finit}) \\ e^{\int \tau(x)\,dx} & \qquad\qquad (a=-\infty,\ b=+\infty) \end{cases} \tag{29}$$

Condițiile la limită (28) pentru funcția $\varphi$ impun următoarele restricții pentru $\tau$ :

1) dacă $a$ este finit $\tau(a)>0$

2) dacă $b$ este finit $\tau(b)<0$

3) $\tau'(x)<0$

Cu ajutorul formulelor (29) putem găsi ponderea $\rho$ pentru un polinom $\tau$ dat pe un interval $(a, b)$. Se știe că printr-o transformare liniară de forma

$$x=\frac{b-a}{2}\,t+\frac{b+a}{2}\ ; \qquad -1\leqslant t\leqslant 1$$

intervalul $(a, b)$ cu $a$, $b$ finiți se transformă în intervalul $(-1, 1)$. Polinoamele ortogonale $p_n(x)$ în raport cu ponderea $\rho$ cu $\rho(x)=(b-x)^{\beta}\,(x-a)^{\alpha}$ pe intervalul $(a, b)$ se transformă în polinoamele $P_n(\alpha, \beta)$ ortogonale în raport cu ponderea $\rho$ unde $\rho(t)=(1-t)^{\beta}\,(1+t)^{\alpha}$ pe intervalul $(-1, 1)$. În acest caz din ecuația diferențială (27) se obține $\tau(t)=-(\alpha+\beta+2)\,t+\alpha-\beta$ ; iar condițiile la limită (28) sînt satisfăcute pentru $\alpha>-1$, $\beta>-1$. Polinoamele $P_n(\alpha, \beta)$ se numesc *polinoamele lui Jacobi.*

În cazul $a=-\infty$, $b$ finit sau $a$ finit, $b=+\infty$, printr-o transformare liniară de forma :

$$x=\gamma t+\delta$$

intervalul $(a, b)$ va fi transformat în intervalul standard $(0, \infty)$. Transformarea se poate determina astfel ca în $\tau(t)$, $t$ să apară cu coeficientul $-1$. Obținem $\rho(t)=t^2\,e^{-t}$ $(0\leqslant t<\infty)$. Pentru $\sigma(t)=t$, se obține din (27) $\tau(t)=-t+\alpha+1$. Condițiile (28) sînt satisfăcute dacă $\alpha>-1$. Polinoamele ortogonale corespunzătoare se numesc *polinoame Laguerre* $(L_n^{\alpha})$.

În cazul $a=-\infty$, $b=+\infty$ făcînd transformarea $x=\gamma t+\delta$ astfel ca $\rho$ să ia forma $\rho(t)=e^{-t^2}$, se obține pentru $\tau$ din (27) expresia $\tau(t)=-t$. Polinoamele ortogonale corespunzătoare sînt numite *polinoame ortogonale Hermite* $(H_n)$.

Rezultatele obținute mai sus putem să le sistematizăm în următorul tabel :

| $(a, b)$ | $\rho(x)$ | $\sigma(x)$ | $\tau(x)$ | $p_n(x)$ |
|---|---|---|---|---|
| $(-1, 1)$ | $(1-x)^{\beta}\,(1+x)^{\alpha}$ | $1-x^2$ | $-(\alpha+\beta+2)\,x+x-\beta$ | $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ |
| $(0, \infty)$ | $e^{-\alpha}x^{\alpha}$ | $x$ | $-x+\alpha+1$ | $L_n^{\alpha}(x)$ |
| $(-\infty, +\infty)$ | $e^{-x^2}$ | $1$ | $-2x$ | $H_n(x)$ |

Polinoamele Jacobi $P_n^{(\alpha,\beta)}$ au următoarele cazuri particulare importante

1) polinoamele Legendre $P_n$ $(\alpha=\beta=0)$

2) polinoamele Cebîșev de prima speță $T_n$

$$\left(\alpha=\beta=-\frac{1}{2}\right) \text{ și speța a doua } U_n\left(\alpha=\beta=\frac{1}{2}\right)$$

## 10. PROPRIETĂȚI FUNDAMENTALE ALE POLINOAMELOR ORTOGONALE CLASICE

Ca o primă proprietate a polinoamelor ortogonale clasice vom da următoarea teoremă :

**Teorema 5.** Derivatele polinoamelor ortogonale clasice $P_n^{(m)}$ sînt de asemenea polinoame ortogonale clasice — în raport cu ponderea $\rho_m$, unde

$$\rho_m(x)=\sigma^m(x)\,\rho(x) \tag{30}$$

și care satisface ecuația diferențială

$$\frac{d}{dx}[\sigma(x)\,\rho_m(x)]=\tau_m(x)\,\rho_m(x) \tag{31}$$

cu condițiile la limită

$$x^k\sigma(x)\,\rho_m(x)\,\big|_{x=a,b}=0 \qquad (k=0,1,2,\ldots)$$

funcțiile $\tau_m$ fiind date de expresiile

$$\tau_m(x)=m\sigma'(x)+\tau(x) \tag{32}$$

*Demonstrație.* Teorema se demonstrează prin recurență asupra lui $m$. Vom demonstra pentru $m=1$. Considerăm integrala

$$\int_a^b p_n(x)\,x^{m-1}\tau(x)\,\rho(x)\,dx \tag{33}$$

Pentru $m<n$ integrala se anulează, $x^{m-1}\tau(x)$ fiind un polinom de gradul $m$. Folosind ecuația (27) și integrînd prin părți obținem

$$\int_a^b p_n(x)\,x^{m-1}(x)\,\tau(x)\,\rho\,dx=\int_a^b p_n(x)\,x^{m-1}\frac{d}{dx}[\sigma(x)\,\rho(x)\,dx=$$

$$=p_n(x)\,x^{m-1}\,\sigma(x)\,\rho(x)\Big|_a^b-\int_a^b\sigma(x)\,\rho(x)\frac{d}{dx}[p_n(x)\,x^{m-1}]\,dx=$$

$$=-(m-1)\int_a^b p_n(x)\,x^{m-2}\sigma(x)\,\rho(x)\,dx-\int_a^b\sigma(x)\,\rho(x)\,p'_n(x)\,x^{m-1}dx$$

$$\int_a^b p_n(x)\,x^{m-2}\sigma(x)\,\rho(x)\,dx=0 \text{ pentru } m<n \text{ deoarece gradul } \sigma\leqslant 2$$

Obținem deci :

$$-\int_a^b p'_n(x)\,x^{m-1}\sigma(x)\,\rho(x)\,dx=0 \text{ pentru } m<n$$

Notînd

$$\rho_1(x)=\sigma(x)\,\rho(x)\,dx, \text{ avem}$$

$$\int_a^b p_n'(x)\,x^{m-1}\rho_1(x)\,dx=0 \text{ pentru } m<n$$

ceea ce arată că polinoamele $p_n'$ de grad $n-1$ sînt pentru orice $n$ ortogonale în raport cu ponderea $\rho_1$ cu $\rho_1(x)=\sigma(x)\,\rho(x)$ cu polinoamele de forma $x^m$, pentru orice $m<n-1$. Polinoamele $\{p_n'\}_{n\in\mathbf{N}}$ formează pe intervalul $(a, b)$ un sistem de polinoame ortogonale în raport cu ponderea $\rho_1$ cu $\rho_1(x)=\sigma(x)\,\rho(x)$.

Trebuie să demonstrăm că ponderea $\rho_1$ satisface o ecuaţie diferenţială de forma (27) cu condiţii la limită de forma (28).

Avem

$$\frac{d}{dx}[\sigma(x)\,\rho_1(x)]=\sigma'(x)\,\rho_1(x)+\sigma(x)\frac{d\rho(x)\,\sigma(x)}{dx}=$$

$$=\sigma'(x)\,\rho_1(x)+\sigma(x)\,\rho(x)\,\tau(x)=[\sigma'(x)+\tau(x)]\,\rho_1(x)=$$

$$=\tau_1(x)\,\rho_1(x), \text{ unde } \tau_1 \text{ cu } \tau_1(x)=\sigma'(x)+\tau(x)$$

este un polinom de gradul întîi. Funcţia pondere $\rho_1$ cu $\rho_1(x)=\sigma(x)\,\rho(x)$ satisface deci ecuaţia diferenţială

$$\frac{d}{dx}[\sigma(x)\rho_1(x)]=\tau_1(x)\,\rho_1(x)$$

Condiţiile la limită vor fi

$$x^k\sigma(x)\rho_1(x)\,|_{x=a,\,b}=0 \qquad k=0, 1, 2, \ldots$$

Procedînd prin recurenţă putem demonstra teorema 5.

N. Sonine a demonstrat că dintre toate polinoamele ortogonale, doar polinoamele ortogonale clasice au proprietatea enunţată prin teorema 5.

**Teorema 6.** Polinoamele ortogonale clasice satisfac o ecuaţie diferenţială de ordinul doi de forma:

$$\sigma(x)\,p_n''(x)+\tau(x)\,p_n'(x)+\lambda_n p_n(x)=0 \tag{34}$$

unde $\lambda_n$ sînt constante date de relaţia:

$$\lambda_n=-n\left[\tau'(x)+\frac{1}{2}(n-1)\,\sigma''(x)\right] \tag{35}$$

Pornind de la faptul că derivatele de ordinul întîi ale polinoamelor ortogonale clasice formează un şir de polinoame ortogonale clasice în raport cu ponderea $\rho_1$ unde $\rho_1(x)=\sigma(x)\,\rho(x)$, avem:

$$\int_a^b p_n'(x)\quad (x^m)'\sigma(x)\,\rho(x)\,dx=0 \text{ oricare ar fi } m<n$$

Integrînd prin părţi obţinem:

$$\int_a^b \sigma(x)\,\rho(x)\,p_n'(x)\,(x^m)'dx=\sigma(x)\,\rho(x)\,x^m p_n'(x)\Big|_a^b-$$

$$-\int_a^b [\sigma(x)\rho(x)p_n''(x)+(\sigma(x)\rho(x))'p_n'(x)]\,x^m dx =$$

$$= -\int_a^b [\sigma(x)p_n''(x)+\tau(x)p_n'(x)]\,\rho(x)\,x^m dx = 0$$

Avem deci:

$$\int_a^b \tilde{p}_n(x)\,x^m\rho(x)\,dx = 0 \quad \text{oricare ar fi} \quad m<n$$

unde

$$\tilde{p}_n(x) = \sigma(x)\,p_n''(x) + \tau(x)\,p_n'(x)$$

ceea ce arată că polinoamele $\tilde{p}_n$ de grad $n$ sînt ortogonale în raport cu ponderea $\rho$ cu orice polinom de forma $x^m$, cu $m<n$. Pe baza unicității sistemului de polinoame ortogonale în raport cu ponderea $\rho$ dată, rezultă că polinomul $p_n$ diferă de polinomul $\tilde{p}_n$ printr-un factor constant. Avem deci:

$$\tilde{p}_n(x) = -\lambda_n p_n(x) \quad \text{oricare ar fi} \quad x\in(a,b)$$

adică

$$\sigma(x)\,p_n''(x)+\tau(x)\,p_n'(x)+\lambda_n p_n(x) = 0$$

Constantele $\lambda_n$ se determină prin identificarea coeficienților lui $x^n$ din ecuația obținută. Obținem astfel expresia (35) pentru constanța $\lambda_n$.

Folosind ecuația (27) pentru $\rho$, putem pune ecuația (34) sub formă autoconjugată:

$$[\sigma(x)\,\rho(x)\,p_n'(x)]' + \lambda_n\rho(x)\,p_n(x) = 0 \tag{36}$$

sau

$$[\rho_1(x)\,p_n'(x)]' + \lambda_n\,\rho(x)\,p_n(x) = 0 \tag{36'}$$

Ținînd seama că polinoamele $p_n^{(m)}$ sînt polinoame ortogonale clasice în raport cu ponderea $\rho_m$ rezultă imediat că ele verifică o ecuație diferențială de forma (36') și anume:

$$[\rho_{m+1}(x)\,p_n^{(m+1)}(x)]' = -\lambda_{nm}\rho_m(x)\,p_n^{(m)}(x) \tag{37}$$

unde

$$\lambda_{nm} = -(n-m)\left[\tau_m'(x) + \frac{1}{2}(n-m-1)\,\sigma''(x)\right] =$$

$$= -(n-m)\left[(n+m-1)\,\frac{\sigma''(x)}{2} + \tau_m'(x)\right] \tag{38}$$

Scriind ecuația (37) sub forma

$$\rho_m(x)\,p_n^{(m)}(x) = \frac{1}{-\lambda_{nm}}\,\frac{d}{dx}\,[\rho_m(x)\,p_n^{(m+1)}(x)]$$

și luînd $m=0, 1, 2, \ldots$, obținem un șir de relații care ne dau ecuația diferențială de ordinul $2m$ pentru polinoamele $p_n$:

$$\frac{d^m}{dx^m}\,[\rho_m(x)\,p_n^m(x)] = A_{nm}p_n(x)\cdot\rho(x) \tag{39}$$

unde

$$A_{nm}=(-1)^n \prod_{k=0}^{m-1} \lambda_{nk}$$

Înlocuind în formula (39) pe $m=n$ şi observînd că $p_n^{(n)}(x)=n!\,a_n$, obţinem formula

$$p_n(x)=A_n \frac{1}{\rho(x)} \frac{d^n}{dx^n}[\sigma^n(x)\rho(x)] \tag{40}$$

unde

$$A_n=\frac{n!\,a_n}{A_{nn}}$$

Formula (40) se numeşte *formula generalizată a lui Rodrigues*. Pentru polinoamele Legendre ea a fost obţinută în anul 1814 de către Rodrigues.

## 11. POLINOAMELE LEGENDRE

Am arătat la paragraful doi că polinoamele Legendre $P_n$ sînt polinoame Jacobi $P_n^{(\alpha,\beta)}$ particulare obţinute pentru $\alpha=\beta=0$. Putem obţine ecuaţia diferenţială a polinoamelor Legendre din ecuaţia (34) făcînd $\alpha=\beta=0$. Se obţine ecuaţia de forma:

$$(1-x^2)\,y''(x)+2x\,y'(x)+n(n+1)\,y(x)=0$$

$$y=P_n$$

Formula lui Rodrigues o obţinem din formula (40) pentru $\alpha=\beta=0$ şi are forma:

$$P_n(x)=\frac{(-1)^n}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}[(1-x^2)^n] \tag{41}$$

Vom deduce în continuare o expresie pentru polinoamele Legendre cu ajutorul aşa numitei funcţii generatoare.

**Definiţia 3.** Se numeşte *funcţie generatoare* a sistemului de polinoame $\{p_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ o funcţie $\Phi:\mathbf{D}\subset\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ a cărei dezvoltare în serie are forma:

$$\Phi(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\bar{p}_n(x)}{n!}t^n$$

unde

$$\bar{p}_n(x)=\frac{1}{A_n}p_n(x)$$

Se arată că funcţia generatoare a polinoamelor Legendre este definită de relaţia:

$$\Phi(x,t)=\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}}$$

Dezvoltarea în serie de puteri după puterile lui $t$ va fi de forma:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}}=\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{P}_n(x)\, t^n \tag{42}$$

Seria (42) este convergentă pentru $|t|<1$.

Expresia (42) își găsește o largă aplicație în fizica teoretică sub forma:

$$\frac{1}{|\bar{r}-\bar{r}_0|}=\frac{1}{\sqrt{r^2-2rr_0\cos\alpha+r_0^2}}=\begin{cases}\dfrac{1}{r}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{r}{r_0}\right)^n \mathrm{P}_n(\cos\alpha); & r<r_0\\ \dfrac{1}{r}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{r_0}{r}\right)^n \mathrm{P}_n(\cos\alpha); & r>r_0\end{cases}$$

unde $\bar{\mathbf{r}}$, $\bar{\mathbf{r}}_0$ sînt vectorii de poziție a punctelor $P$ respectiv $P_0$ în raport cu un punct $O$, iar $\alpha$ unghiul vectorilor $\bar{\mathbf{r}}$ și $\bar{r}_0$.

Pornind de la expresia (42) vom determina expresia polinoamelor Legendre $P_n$. Avem

$$\Phi(x,t)=(1-2tx+t^2)^{-\frac{1}{2}}=[1-t(2x-t)]^{-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{P}_n(x)\,t^n$$

Punînd $u=t(2x-t)$, avem:

$$(1-u)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}u+\frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}u^2+\ldots\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-2k-1)}{2^{n-k}(n-k)!}u^{n-k}+\ldots$$

Termenii $u^{n-k}=t^{n-k}(2x-t)^{n-k}$ care conțin pe $t^n$ se obțin pentru $k=0, 1, \ldots, E\left(\frac{n}{2}\right)$; $E\left(\frac{n}{2}\right)$ fiind partea întreagă a lui $\frac{n}{2}$. Coeficientul lui $t^n$ din termenul $u^{n-k}$ este $(-1)^k C_{n-k}^k (2x)^{n-2k}$ astfel că obținem ca expresie pentru $P_n$:

$$\mathrm{P}_n(x)=\sum_{k=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)}(-1)^k C_{n-k}^k\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-2k-1)}{2^k(n-k)!}x^{n-2k} \tag{42'}$$

Vom da în continuare cîteva proprietăți ale polinoamelor Legendre.

**Proprietatea 5.** Polinoamele Legendre satisfac relația de recurență, exprimată prin:

$$(n+1)\,\mathrm{P}_{n+1}(x)-(2n+1)\,x\,P_n(x)+n\mathrm{P}_{n-1}(x)=0 \text{ oricare ar fi } x\in(-1,1)$$
$$n=0, 1, 2, \ldots \tag{43}$$

Pentru demonstrație pornim de la relația:

$$(1-2tx+t^2)^{-\frac{1}{2}}=\mathrm{P}_0(x)+\mathrm{P}_1(x)\,t+\mathrm{P}_2(x)\,t^2+\ldots+\mathrm{P}_n(x)\,t^n+\ldots$$

pe care o derivăm în raport cu t:

$$-\frac{1}{2}(1-2tx+t^2)^{-\frac{3}{2}}(-2x+2t)=\mathrm{P}_1(x)\,t+2\mathrm{P}_2(x)\,t+\ldots+n\mathrm{P}_n(x)\,t^{n-1}+\ldots$$

Folosind relaţia precedentă obţinem:

$$(x-t)\,[P_0(x)+P_1(x)\,t+P_2(x)\,t^2+\ldots+P_n(x)\,t^n+\ldots]=$$
$$=(1-2tx+t^2)\,[P_1(x)+2P_2(x)\,t+\ldots+n\,P_n(x)\,t^{n-1}+\ldots]$$

Relaţia (43) se obţine imediat prin identificarea coeficienţilor lui $t^n$.

**Proprietatea 6.** Polinoamele Legendre au toate rădăcinile reale şi distincte cuprinse în intervalul $(-1,\ 1)$.

Proprietatea se demonstrează pornind de la ecuaţia

$$(x^2-1)^n=0$$

şi aplicînd teorema lui Rolle polinomului P, exprimat prin $P(x)=(x^2-1)^n$ şi polinoamelor $P',\ P'',\ \ldots,\ P^{(n)}$.

## 12. POLINOAMELE LAGUERRE ŞI HERMITE

Pornind de la ecuaţia (34) se obţine ecuaţia diferenţială a polinoamelor Laguerre $(L_n^\alpha)$,

$$xy''(x)+(1-\alpha-x)\,y'(x)+ny(x)=0 \tag{43'}$$

şi ecuaţia diferenţială a polinoamelor Hermite $(H_n)$

$$y''(x)-2xy'(x)+2ny(x)=0 \tag{44}$$

iy=$H_n$.

Formula lui Rodrigue ia următoarea formă pentru polinoamele Laguerre;

$$L_n^\alpha(x)=\frac{1}{n\,!}\,e^x x^{-\alpha}\,\frac{d^n}{dx^n}\,(e^{-x}x^{n+\alpha}) \tag{45}$$

iar pentru polinoamele Hermite ia forma

$$H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\,\frac{d}{dx}\,(e^{-x^2}) \tag{46}$$

Funcţia generatoare a polinoamelor Laguerre este exprimată prin relaţia

$$\Phi(x,t)=\frac{1}{(1-t)^{\alpha+1}}\cdot e^{-\frac{xt}{1-t}}$$

Dezvoltînd funcţia $\Phi$ în serie Taylor după puterile lui $t$, pentru $|t|<1$ obţinem

$$\frac{1}{(1-t)^{\alpha+1}}\,e^{-\frac{xt}{1-t}}=\frac{1}{(1-t)^{\alpha+1}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^k}{k\,!}\,\frac{t^k}{(1-t)^k}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^k}{k\,!}\,\frac{t^k}{(1-t)^{k+\alpha+1}}$$

$$(1-t)^{-k-\alpha-1}=\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p\,\frac{(-k-\alpha-1)\,(-k-\alpha-2)\ldots(k-\alpha-p)}{p\,!}\,t^p=$$

$$=\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p\,\frac{\Gamma(-k-\alpha-p+1)}{p\,!\,\Gamma(-k-\alpha-1)}\,t^p$$

Obținem deci :

$$\Phi(x, t)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^k}{k!}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^p \frac{\Gamma(1-k-\alpha-p)}{p!\,\Gamma(-k-\alpha-1)}t^{p+k}$$

Evaluînd coeficientul lui $t^n$ din această dezvoltare obținem următoarea expresie pentru polinoamele $L_n^\alpha$

$$L_n^\alpha(x)=(-1)^n\sum_{p=0}^{n}\frac{\Gamma(n-\alpha+1)}{p!\,\Gamma(p-n-\alpha+1)}\frac{x^{n-p}}{(n-p)!} \tag{47}$$

Funcția generatoare a polinoamelor Hermite se exprimă prin

$$\Phi(x, t)=e^{x^2}\cdot e^{-(t+x)^2}$$

Dezvoltînd în serie după puterile lui $t$ obținem :

$$\Phi(x, t)=e^{x^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}\cdot\frac{t^n}{n!}$$

de unde rezultă următoarea expresie pentru polinoamele $H_n$.

$$H_n(x)=e^{x^2}\frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n} \tag{48}$$

Relațiile de recurență pentru polinoamele $L_n^\alpha$ și $H_n$ sînt date prin relațiile

$$(n+1)L_{n+1}^\alpha(x)-(2n+1+\alpha-x)L_n^\alpha(x)+(\alpha+n)L_{n-1}^\alpha(x)=0$$

respectiv

$$H_{n+1}(x)+2xH_n(x)+2nH_{n-1}(x)=0$$

## § 3. FUNCȚIILE LUI BESSEL

### 13. FUNCȚIILE LUI BESSEL DE SPEȚA ÎNTÎI

**Definiția** 4. Ecuația diferențială de ordinul doi

$$z^2\frac{d^2y(z)}{dz^2}+z\frac{dy(z)}{dz}+(z^2-\nu^2)\,y(z)=0 \tag{49}$$

unde $\nu\in\mathbf{R}$ sau $\mathbf{C}$, $z\in\mathbf{R}$ sau $\mathbf{C}$ se numește *ecuația lui Bessel*, iar soluțiile particulare ale acestei ecuații se numesc *funcții Bessel*.

Pentru a deduce expresia funcțiilor Bessel de speța întîi vom căuta soluții ale ecuației (49) care să se exprime ca suma unei serii de forma

$$y(z)=z^\rho\sum_{k=0}^{\infty}c_k z^k \tag{50}$$

Presupunem că seria de mai sus poate fi derivată termen cu termen și punînd condiția ca funcția $y$ și derivatele sale pînă la ordinul doi să verifice ecuația (49), obținem relația

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\rho+k)^2 c_k z^k+(z^2-\nu^2)\sum_{k=0}^{\infty}c_k z^k=0$$

sau

$$\sum_{k=0}^{\infty} [(\rho+k)^2-\nu^2]\, c_k z^k = -\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{k+2}$$

Prin identificarea coeficienților celor două serii obținem relațiile

$$(\rho^2-\nu^2)\, c_0=0 \tag{51}$$

$$[(\rho+1)^2-\nu^2]\, c_1=0$$

$$[(\rho+k)^2-\nu^2]\, c_k=-c_{k-2}\,; \quad k=2, 3, \ldots \tag{52}$$

Putem presupune $c_0 \neq 0$. În acest caz avem

$$\rho^2-\nu^2=0$$

Putem lua pe $\nu$ astfel ca $0 \leqslant \arg \nu < \pi$, deci dacă $\nu \in \mathbf{R}$, se ia $\nu \geqslant 0$

Obținem astfel

$$\rho=\nu \quad \text{și} \quad \rho=-\nu$$

Pentru fiecare din valorile lui $\rho$ de mai sus obținem două soluții particulare ale ecuației (49).

Pentru $\rho=\nu$, din a doua relație (51) obținem

$$(2\nu+1)\, c_1=0$$

Cum $2\nu+1 \neq 0$; rezultă $c_1=0$, iar pe baza relațiilor (52) obținem toți coeficienții de rang impar egali cu zero:

$$c_1=c_3=c_5=\ldots=c_{2p+1}=\ldots=0$$

Din relațiile (52) vom obține coeficienții de rang par exprimați cu ajutorul lui $c_0$.

Avem:

$$2^2 \cdot 1\, (\nu+1)\, c_2=-c_0$$

$$2^2 \cdot 2\, (\nu+2)\, c_4=-c_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$2^2 \cdot p\, (\nu+p)\, c_{2p}=-c_{2p-2}$$

Prin înmulțirea termen cu termen a acestor relații obținem

$$c_{2p}=(-1)^p \frac{c_0}{2^{2p}\, p\,!\, (\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+p)}$$

Înlocuind

$$(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+p)=\frac{\Gamma(\nu+p+1)}{\Gamma(\nu+1)}$$

avem

$$c_{2p}=(-1)^p \frac{c_0\, \Gamma(\nu+1)}{2^{2p}\, p\,!\, \Gamma(\nu+p+1)}$$

**Definiția 5.** Se numește *funcția Bessel de speța întîi și ordinul* $\nu$ soluția particulară dată de expresia (50) a ecuației (49), obținută pentru valoarea lui $c_0$ dată de:

$$c_0=\frac{1}{2^\nu\, \Gamma(\nu+1)}$$

Obţinem astfel funcţia Bessel de speţa întîi şi ordinul $\nu$; $J_\nu$ dată prin relaţia:

$$J_\nu(z)=\left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p \left(\frac{z}{2}\right)^{2p}}{p!\,\Gamma(\nu+p+1)} \tag{53}$$

Seria

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p \left(\frac{z}{2}\right)^{2p}}{p!\,\Gamma(\nu+p+1)}$$

este o serie de puteri cu raza de convergenţă $R$ dată de

$$R=\lim_{p\to\infty}\left|\frac{(-1)^p}{p!\,\Gamma(\nu+p+1)}\cdot\frac{(p+1)!\,\Gamma(\nu+p+2)}{(-1)^{p+1}}\right|=\infty$$

deci funcţia $\varphi: \mathbf{C}\to\mathbf{C}$ definită prin

$$\varphi(z)=\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p \left(\frac{z}{2}\right)^{2p}}{p!\,\Gamma(\nu+p+1)}$$

este monogenă în fiecare punct al planului complex (la distanţă finită).

Putem enunţa astfel următoarea teoremă:

**Teorema 7.** Funcţia Bessel de speţa întîi şi ordin întreg $J_\nu$ definită prin relaţia (53), pentru $\nu=n$, $n\in\mathbf{N}$ este olomorfă şi uniformă în orice domeniu definit prin $|z|<R$, cu $R$ arbitrar de mare. Pentru $\nu\neq n$, $n\in\mathbf{N}$ funcţia $J_\nu$ este olomorfă în domeniul $\mathbf{D}=(z)-T$, unde $T$ este o semidreaptă cu originea în $z=0$.

Pentru $\rho=-\nu$, dacă $\nu\neq\dfrac{2m+1}{2}$, $m\in\mathbf{N}$ vom avea:

$$c_2=c_3=\ldots c_{2p+1}=\ldots=0$$

Pentru coeficienţii de rang par obţinem următoarea relaţie:

$$c_{2p}=\frac{(-1)^p\, c_0\, \Gamma(-\nu+1)}{2^{2p}\cdot p!\,\Gamma(-\nu+p+1)}$$

în cazul $\nu\neq n$, $n\in\mathbf{N}$. Analog cu cazul în care am dedus expresia funcţiei $J_\nu$, obţinem expresia funcţiei Bessel de speţa întîi şi ordinul $-\nu$ dată de relaţia

$$J_{-\nu}(z)=\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu}\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2p}}{p!\,\Gamma(-\nu+p+1)}. \tag{54}$$

Se observă că această expresie se poate obţine în mod formal din expresia (53) a funcţiei $J_\nu$ înlocuind pe $\nu$ cu $-\nu$.

**Cazul $\nu=\dfrac{2m+1}{2}$, pentru un $m\in\mathbf{N}$ îl vom trata mai tîrziu.**

**Pentru $\nu=n$, $n$ fiind un număr natural, avem $\nu\neq\dfrac{2m+1}{2}$, deci $c_1=c_3=$**

$=\ldots=c_{2p+1}=\ldots=0$ și $c_{2n-2}=c_{2n-4}=\ldots=c_2=c_0=0$. Rămîn din (52) relațiile

$$2^2(n+1)\cdot 1\cdot c_{2n+2}=-c_{2n}$$
$$2^2(n+2)\cdot 2c_{2n+4}=-c_{2n+2}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$2^2(n+q)\,q\,c_{2n+2q}=-c_{2n+2q-2}$$

de unde

$$c_{2n+2q}=\frac{(-1)^q\, n!\, c_{2n}}{2^{2q}\cdot q!\,(n+q)!}$$

Luînd pentru $c_{2n}$ valoarea

$$c_{2n}=\frac{1}{2^n\cdot n!}$$

Înlocuind valorile coeficienților în expresia (50) obținem o soluție $y_0$ a ecuației (49) avînd expresia dată de

$$y_0(z)=\left(\frac{z}{2}\right)^n\sum_{q=0}^{\infty}(-1)^q\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2q}}{q!\,(n+q)!}$$

Se observă că funcția $y_0=J_n$, unde $J_n$ este funcția $J_\nu$ pentru $\nu=n$.

Vom da în continuare următoarea teoremă:

**Teorema 8.** Dacă $J_\nu$ și $J_{-\nu}$ sînt funcțiile Bessel de speța întîi și ordin $\nu$, respectiv $-\nu$, atunci:

a) pentru $\nu\neq n$, soluția generală a ecuației (48) este dată de funcția

$$y=AJ_\nu+BJ_{-\nu} \tag{55}$$

$A$ și $B$ fiind două constante arbitrare.

b) pentru $\nu=n$, între funcțiile $J_n$ și $J_{-n}$ avem relația

$$J_{-n}=(-1)^n J_n \tag{56}$$

*Demonstrație.* Pentru a demonstra prima afirmație a teoremei, demonstrăm că wronskianul funcțiilor $J_\nu$ și $J_{-\nu}$, pentru $\nu\neq n$, este diferit de zero.

Funcțiile $J_\nu$ și $J_{-\nu}$ sînt soluții ale ecuației (48), deci avem relațiile

$$z^2J''_\nu(z)+zJ'_\nu(z)+(z^2-\nu^2)\,J_\nu(z)=0$$
$$z^2J''_{-\nu}(z)+zJ'_{-\nu}(z)+(z^2-\nu^2)\,J_\nu(z)=0$$

de unde avem:

$$z^2\,[J_\nu(z)\,J''_{-\nu}(z)-J_{-\nu}(z)\,J''_\nu(z)]+z\,[J_\nu(z)\,J'_\nu(z)-$$
$$-J_\nu(z)\,J'_\nu(z)]=0 \tag{57}$$

Notînd cu $w$ wronskianul funcțiilor $J_\nu$ și $J_{-\nu}$ avem

$$w(z)=\begin{vmatrix} J_\nu(z) & J_{-\nu}(z)\\ J'_\nu(z) & J'_{-\nu}(z)\end{vmatrix} \tag{58}$$

În acest fel relația (57) se scrie sub forma unei ecuații diferențiale de ordinul întîi

$$z w'(z)+w(z)=0$$

Soluția acestei ecuații este funcția $w$ dată de

$$w(z)=\frac{c}{z}$$

unde $c$ este o constantă pe care o vom determina. Pentru determinarea constantei $c$, precizăm primii termeni ce apar în expresiile funcțiilor $J_\nu$, $J_{-\nu}$, $J'_\nu$ și $J'_{-\nu}$. Avem :

$$J_\nu(z)=\left(\frac{z}{2}\right)^\nu \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}+\ldots ; \quad J_{-\nu}(z)=\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu} \frac{1}{\Gamma(-\nu+1)}+\ldots$$

$$J'_\nu(z)=\frac{\nu}{2}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu-1} \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}+\ldots ; \quad J'_{-\nu}(z)=-\frac{\nu}{2}\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu-1} \frac{1}{\Gamma(-\nu+1)}+\ldots$$

Calculînd expresia funcției $w$ dată de relația (58), se observă că acești termeni sînt singurii care dau în expresia lui $w$ termeni în $\frac{1}{z}$. Avem astfel:

$$w(z)=-\frac{2\nu}{z} \frac{1}{\Gamma(\nu+1)\,\Gamma(-\nu+1)}$$

respectiv

$$w(z)=-\frac{2}{z} \frac{1}{\Gamma(\nu)\,\Gamma(1-\nu)}$$

și ținînd cont de relația (8) obținem următoarea expresie pentru $w$ :

$$w(z)=-\frac{2 \sin \nu\pi}{\pi z} \tag{59}$$

deci $w(z)\neq 0$ oricare ar fi $z\neq 0$ și $\nu\neq n$.

Pentru $\nu\neq n$, funcțiile $J_\nu$ și $J_{-\nu}$ sînt deci independente, fiind soluții ale ecuației lui Bessel, soluția generală $y$ a ecuației se va exprima sub forma (55). Pe de altă parte rezultă că pentru $\nu=n$, funcția $w$ este funcția nulă, deci $J_n$ și $J_{-n}$ sînt dependente. Pentru a deduce relația (56) de dependență dintre aceste funcții vom considera expresia funcției $J_{-n}$ obținută din cea a funcției $J_n$ pentru $\nu=n$. Avem

$$J_{-n}(z)=\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{-n+2p}}{p\,!\,\Gamma(-n+p+1)}$$

Cum funcția $\Gamma$ are ca poli simpli punctele $z=0, \ -1, \ -2, \ldots,$ avem că $\frac{1}{\Gamma(z)}=0$ pentru $z=0, -1, -2, \ldots$

Avem $\frac{1}{\Gamma(-n+p+1)}=0$ pentru $p=n-1,\ n-2, \dots, 1, 0$ deci expresia funcţiei $J_{-n}$ se reduce la

$$J_{-n}(z)=\sum_{p=n}^{\infty}(-1)^p\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{-n+2p}}{p\,!\,\Gamma(-n+p+1)}$$

*Făcînd o schimbare a indicelui de însumare ; $p=n+q$ obţinem*

$$J_{-n}(z)=\sum_{q=0}^{\infty}(-1)^{n+q}\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2q}}{(n+q)\,!\,\Gamma(q+1)}=(-1)^n J_n(z)$$

### 14. FUNCŢIILE BESSEL DE SPEŢA A DOUA

Deoarece pentru $\nu=n$ funcţiile $J_\nu$ şi $J_{-\nu}$ constituie un sistem fundamental de soluţii pentru ecuaţia diferenţială (49), vom căuta o soluţie particulară $y_\nu$ a acestei ecuaţii care să fie independentă de funcţia $J_\nu$ pentru orice $\nu$. Forma wronskianului $w$ ne sugerează ca să luăm pe $Y_\nu$ funcţia definită prin

$$Y_\nu=\frac{1}{\sin\nu\pi}(AJ_\nu+BJ_{-\nu}) \tag{60}$$

**Definiţia 6.** Se numeşte *funcţia Bessel de speţa a doua şi ordinul* $\nu$, funcţia $Y_\nu$ dată de (60). Funcţia Bessel de speţa a doua şi ordinul $\nu=n\in\mathbf{N}$ se obţine din $Y_\nu$ prin trecere la limită pentru $\nu\to n$ ;

$$Y_n=\lim_{\nu\to n}Y_\nu$$

**Teorema 9.** Integrala generală a ecuaţiei (49) este dată de funcţia

$$Y=AJ_\nu+BY_\nu$$

$J_\nu$, $Y_\nu$ fiind funcţiile Bessel de speţa întîi şi a doua şi de ordinul $\nu$, $A$ şi $B$ două constante arbitrare.

*Demonstraţie.* Funcţia $Y_\nu$ pentru $\nu\neq n$ este o soluţie a ecuaţiei (49) fiind o combinaţie liniară de soluţii particulare a ecuaţiei respective. Vom arăta că şi $Y_n$ este o soluţie a ecuaţiei (49). Deducem în prealabil expresia funcţiei $Y_n$, calculînd $\lim\limits_{\nu\to n}Y_\nu$ cu ajutorul regulei lui l'Hospital. Avem

$$Y_n=\lim_{\nu\to n}\frac{\frac{\partial J_\nu}{\partial\nu}\cos\nu\pi-\pi J_\nu\sin\nu\pi-\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial\nu}}{\pi\cos\nu\pi}$$

de unde

$$Y_n=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\partial J_\nu}{\partial\nu}-(-1)^\nu\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial\nu}\right]_{\nu=n}$$

Punînd condițiile ca funcțiile $J_\nu$ și $J_{-\nu}$ să fie soluții ale ecuației (49) și derivînd în raport cu $\nu$ avem:

$$z^2 \frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{\partial J_\nu(z)}{\partial \nu}\right)+z\frac{d}{dz}\left(\frac{\partial J_\nu(z)}{\partial \nu}\right)+(z^2-\nu^2)\frac{\partial J_\nu(z)}{\partial \nu}-2\nu J_\nu(z)=0$$

$$z^2 \frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{\partial J_\nu(z)}{\partial \nu}\right)+z\frac{d}{dz}\left(\frac{\partial J_\nu(z)}{\partial \nu}\right)+(z^2-\nu^2)\frac{\partial J_{-\nu}(z)}{\partial \nu}-2\nu J_{-\nu}(z)=0$$

De aici obținem

$$z^2\frac{d^2}{dz^2}U\nu(z)+z\frac{d}{dz}U\nu(z)+(z^2-\nu^2)U\nu(z)-2\nu\frac{1}{\pi}\left[J_\nu(z)-(-1)^\nu J_\nu(z)\right]=0$$

unde $U\nu$ este funcția dată de

$$U_\nu=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\partial J\nu}{\partial \nu}-(-1)^\nu\frac{\partial J\nu}{\partial \nu}\right]$$

Trecînd la limită pentru $\nu\to n$, obținem:

$$z^2\frac{d^2Y_n(z)}{dz^2}+z\frac{dY_n(z)}{dz}+(z^2-n^2)Y_n(z)=0$$

ceea ce arată că funcția $Y_n$ este o soluție a ecuației (49).

Calculînd wronskianul $w_1$ al funcțiilor $J_\nu$ și $Y_\nu$, obținem

$$w_1(z)=\begin{vmatrix} J_\nu(z) & Y_\nu(z)\\ J'_\nu(z) & Y'_\nu(z)\end{vmatrix}=\frac{2}{\pi z}$$

deci $w_1(z)\neq 0$, oricare ar fi $z\neq 0$, oricare ar fi $\nu$.

## 15. FUNCȚIILE BESSEL DE SPEȚA A TREIA

**Definiția 7.** Se numesc *funcțiile Bessel de speța a treia sau funcțiile lui Hankel* funcțiile $H^1_\nu$, $H^2_\nu$ definite prin:

$$\left.\begin{aligned} H^{(1)}_\nu&=J_\nu+\mathrm{i}Y_\nu=\mathrm{i}\,\frac{J_\nu e^{-i\pi\nu}-J_{-\nu}}{\sin\pi\nu}\\ H^{(2)}_\nu&=J_\nu-\mathrm{i}Y_\nu=-\mathrm{i}\,\frac{J_\nu e^{+i\pi\nu}-J_{-\nu}}{\sin\pi\nu}\end{aligned}\right\}\qquad(61)$$

Din formulele (61) deducem

$$H^{(1)}_{-\nu}=e^{i\pi\nu}\cdot H^{(1)}_\nu\,;\quad H^{(2)}_{-\nu}=e^{-i\pi\nu}\cdot H^{(2)}_\nu$$

În particular dacă $\nu=n$, $n\in\mathbf{N}$, avem

$$H^{(1)}_{-n}=(-1)^nH^{(1)}_n\,;\quad H^{(2)}_{-n}=(-1)^nH^{(2)}_n$$

Pe baza relațiilor (61) obținem pentru $\nu=\frac{1}{2}$:

$$H^{(1)}_{1/2}(z)=-\mathrm{i}\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,\mathrm{e}^{iz};\quad H^{(1)}_{-1/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,\mathrm{e}^{iz} \tag{61'}$$

$$H^{(2)}_{1/2}(z)=\mathrm{i}\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,\mathrm{e}^{-iz};\quad H^{(2)}_{-1/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,\mathrm{e}^{-iz}$$

## 16. RELAȚII DE RECURENȚĂ

**Teorema 10.** Între funcțiile $y_{\nu-1}$, $y_\nu$, $y_{\nu+1}$, soluții ale ecuației Bessel (49) există relațiile de recurență de forma:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}[z^\nu y_\nu(z)]=z^\nu y_{\nu-1}(z);\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}[z^{-\nu} y_\nu(z)]=-z^{-\nu} y_{\nu+1}(z) \tag{62}$$

sau relațiile echivalente cu acestea

$$y_{\nu-1}(z)+y_{\nu+1}(z)=\frac{2\nu}{z}y_\nu(z),\quad y_{\nu-1}(z)-y_{\nu+1}(z)=2y'_\nu(z) \tag{63}$$

Demonstrăm aceste relații pentru funcțiile Bessel de speța întîi $J_\nu$, folosind expresia (53):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}[z^\nu J_\nu(z)]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p\frac{2^\nu\left(\frac{z}{2}\right)^{2\nu+2p}}{p\,!\,\Gamma(\nu+p+1)}.$$

Seria de mai sus o putem deriva termen cu termen și obținem:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}[z^\nu J^\nu(z)]=\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p\frac{2^\nu(\nu+p)\left(\frac{z}{2}\right)^{2\nu+2p-1}}{p\,!\,\Gamma(\nu+p+1)}=$$

$$=z^\nu\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu-1+2p}}{p\,!\,\Gamma(\nu+p)}=z^\nu J_{\nu-1}(z)$$

deci funcția $J_\nu$ verifică prima relație (62)

Analog avem:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}[z^{-\nu}J_\nu(z)]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2p}}{2^\nu\,p\,!\,\Gamma(\nu+p+1)}=$$

$$=\sum_{p=1}^{\infty}(-1)^p\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2p-1}}{2^\nu\,p\,!\,\Gamma(\nu+p+1)}$$

Făcînd schimbarea de indice $p=q+1$ obţinem

$$\frac{d}{dz}[z^{-\nu}J_\nu(z)]=\sum_{q=0}^{\infty}(-1)^{q+1}\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2q+1}}{2^\nu q!\,\Gamma(\nu+q+2)}=-z^{-\nu}J_{\nu+1}(z)$$

deci a doua relaţie pentru (62).

Să demonstrăm relaţiile (62) şi pentru funcţiile Bessel de speţa a doua. Considerăm relaţiile :

$$\frac{d}{dz}[z^\nu J_\nu(z)]=z^\nu J_{\nu-1}(z)\ ;\ \frac{d}{dz}[z^{-\nu}J_\nu(z)]=-z^{-\nu}J_{\nu+1}(z) \tag{64}$$

şi cele obţinute din ele prin schimbarea lui $\nu$ în $-\nu$

$$\frac{d}{dz}[z^{-\nu}J_\nu(z)]=z^{-\nu}J_{-\nu-1}(z)\ ;\ \frac{d}{dz}[z^\nu J_\nu(z)]=-z^\nu J_{-\nu+1}(z) \tag{65}$$

În ipoteza $\nu\neq n$ întreg, înmulţim relaţiile (64) cu $\operatorname{cotg}\nu\pi$, (65) cu $-\frac{1}{\sin\nu\pi}$ şi le adunăm. Ţinînd seamă de expresia (60) a funcţiilor Bessel de speţa a doua avem :

$$\frac{d}{dz}[z^\nu Y_\nu(z)]=z^\nu\frac{J_{\nu-1}(z)\cos\nu\pi+J_{-\nu+1}(z)}{\sin\nu\pi}$$

$$\frac{d}{dz}[z^{-\nu}Y_\nu(z)]=-z^{-\nu}\frac{J_{\nu+1}(z)\cos\nu\pi+J_{-\nu-1}(z)}{\sin\nu\pi}$$

Din

$$\cos\nu\pi=-\cos(\nu-1)\pi,\qquad \sin\nu\pi=-\sin(\nu-1)\pi$$

$$\cos\nu\pi=-\cos(\nu+1)\pi,\qquad \sin\nu\pi=-\sin(\nu+1)\pi$$

avem :

$$\frac{d}{dz}[z^\nu Y_\nu(z)]=z^\nu Y_{\nu-1}(z)\ ;\ \frac{d}{dz}[z^{-\nu}Y_\nu(z)]=-z^{-\nu}Y_{\nu+1}(z). \tag{66}$$

Trecînd la limită în aceste relaţii pentru $\nu\to n$, $n\in\mathrm{N}$, obţinem :

$$\frac{d}{dz}[z^n Y_n(z)]=z^n Y_{n-1}(z)\ ;\ \frac{d}{dz}[z^{-n}Y_n(z)]=-z^{-n}Y_{n+1}(z)$$

Conform teoremei 5.9. orice soluţie a ecuaţiei Bessel este de forma

$$y_\nu=AJ_\nu+BY_\nu,$$

$A$ şi $B$ fiind constante.

Înmulţind în (64) cu $A$, în (65) cu $B$ şi adunînd obţinem

$$\frac{d}{dz}[z^\nu y_\nu(z)]=z^\nu y_{\nu-1}(z)\ ;\ \frac{d}{dz}[z^{-\nu}y_\nu(z)]=-z^{-\nu}y_{\nu+1}.$$

Derivînd aceste relaţii, obţinem

$$\frac{\nu}{z} y_\nu(z)+y'_\nu(z)=y_{\nu-1}(z)$$

$$-\frac{\nu}{z} y_\nu(z)+y'_\nu(z)=-y_{\nu+1}(z)$$

Pe baza formulelor de recurenţă stabilite pentru soluţiile ecuaţiei Bessel pornind de la relaţiile (61′) putem să deducem expresiile funcţiilor Hankel, pentru un indice $\nu=n+\frac{1}{2}$, $n\in\mathbf{N}$.

## 17. FUNCŢIILE BESSEL DE PRIMA ŞI A DOUA SPEŢĂ de ORDIN SEMIÎNTREG $\left(\nu=n+\frac{1}{2}, n\in\mathbf{N}\right)$

**Teorema 11.** Funcţiile Bessel $J_{n+\frac{1}{2}}$, $J_{n-\frac{1}{2}}$, $Y_{n+\frac{1}{2}}$, $Y_{n-\frac{1}{2}}$ de speţa întîi şi a doua şi ordin semiîntreg pot fi exprimate cu ajutorul funcţiilor elementare.

*Demonstraţie.* Să rezolvăm ecuaţia lui Bessel (49) în cazul particular în care $\nu=\frac{1}{2}$. În acest caz ecuaţia (49) se scrie:

$$\frac{d^2y}{dz}+\frac{1}{z}\frac{dy}{dz}+\left(1-\frac{1}{4z^2}\right)y=0. \tag{67}$$

Făcînd schimbarea de funcţie dată de relaţia

$$y(z)=\frac{u(z)}{\sqrt{z}}$$

în ecuaţia obţinută, avem ecuaţia diferenţială în funcţia necunoscută $u(z)$:

$$\frac{d^2u}{dz^2}+u(z)=0.$$

Soluţia generală a acestei ecuaţii este dată de funcţia $u$, exprimată prin:

$$u(z)=A\cos z+B\sin z$$

$A$, $B$ fiind constante arbitrare. Obţinem astfel ca expresie pentru soluţia generală a ecuaţiei (67)

$$y(z)=\frac{1}{\sqrt{z}}(A\cos z+B\cos z). \tag{68}$$

Vom determina constantele $A$ şi $B$ astfel încît să obţinem ca soluţii funcţiile $J_{\frac{1}{2}}$ şi $J_{-\frac{1}{2}}$. Cum $J_{\frac{1}{2}}(0)=0$ avem $A=0$. Comparînd expresiile dezvoltărilor în serie a funcţiilor $J_{\frac{1}{2}}$ şi $y$ dat de (68); avem:

$$\frac{B}{\sqrt{z}}\left(z-\frac{z^3}{3!}+\dots\right)=\sqrt{\frac{z}{2}}\frac{2}{\sqrt{\pi}}(1+\dots)$$

de unde $B=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$, deci

$$J_{\frac{1}{2}}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin z. \tag{69}$$

Pentru funcţia $J_{-\frac{1}{2}}$ analog obţinem:

$$J_{-\frac{1}{2}}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos z. \tag{70}$$

Dacă în formula (60) care dă expresia funcţiei $Y_\nu$ luăm $\nu=\frac{1}{2}$ şi $\nu=-\frac{1}{2}$ obţinem respectiv:

$$Y_{\frac{1}{2}}(z)=-J_{\frac{1}{2}}(z)=-\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos z \tag{71}$$

$$Y_{-\frac{1}{2}}(z)=J_{\frac{1}{2}}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin z \tag{72}$$

Dacă luăm acum $\nu=\frac{1}{2}$ şi $\nu=-\frac{1}{2}$ în formulele de recurenţă (63), obţinem

$$J_{\frac{3}{2}}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left(\frac{\sin z}{z}-\cos z\right);\quad J_{-\frac{3}{2}}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left(-\sin z-\frac{\cos z}{z}\right).$$

Pentru $\nu=\frac{3}{2}$, şi $\nu=-\frac{3}{2}$ obţinem

$$J_{\frac{5}{2}}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left[\left(\frac{3}{z^2}-1\right)\sin z-\frac{3}{z}\cos z\right]$$

$$J_{-\frac{5}{2}}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left[\frac{3}{z}\sin z+\left(\frac{3}{z^2}-1\right)\cos z\right]$$

Obţinem astfel din aproape în aproape expresiile funcţiilor $J_{n+\frac{1}{2}}$, $J_{-n-\frac{1}{2}}$ de forma

$$J_{n+\frac{1}{2}}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left[A_n\left(\frac{1}{z}\right)\sin z+B_n\left(\frac{1}{z}\right)\cos z\right]$$

$$J_{-n-\frac{1}{2}}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left[C_n\left(\frac{1}{z}\right)\sin z+D_n\left(\frac{1}{z}\right)\cos z\right]$$

$A_n\left(\frac{1}{z}\right)$, $B_n\left(\frac{1}{z}\right)$, $C_n\left(\frac{1}{z}\right)$, $D_n\left(\frac{1}{z}\right)$ fiind polinoame de grad cel mult $n$ în $\frac{1}{z}$.

Înlocuind în formula (60) pe $\nu$ cu $\pm\left(n+\frac{1}{2}\right)$ obţinem

$$Y_{n+\frac{1}{2}}(z)=(-1)^{n+1}J_{-n-\frac{1}{2}}(z)\ ;\ Y_{-n-\frac{1}{2}}(z)=(-1)^{n}J_{n+\frac{1}{2}}(z)$$

Liouville a arătat că funcţiile

$$J_{n+\frac{1}{2}},\ J_{-n-\frac{1}{2}},\ Y_{n+\frac{1}{2}},\ Y_{-n-\frac{1}{2}}$$

sînt singurele funcţii Bessel care pot fi exprimate prin funcţii elementare.

## 18. REPREZENTAREA FUNCŢIILOR BESSEL DE PRIMA SPEŢĂ ŞI ORDIN ÎRTREG PRINTR-O INTEGRALĂ DEFINITĂ

**Teorema 12.** Pentru funcţiile Bessel $J_\nu$, cu $\nu=n\in\mathbf{Z}$ avem următoarea egalitate:

$$i^n J_n(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{iz\cos\theta}\, e^{in\theta}\, d\theta.$$

*Demonstraţie*. Calculăm integrala din membrul doi. Înlocuim

$$\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$$

şi dezvoltăm în serie de puteri expresia $e^{iz\cos\theta}$

$$e^{iz\cos\theta}=e^{iz\frac{e^{i\theta}}{2}}\cdot e^{iz\frac{e^{-i\theta}}{2}}=$$

$$=\left[\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{p\,!}\,i^p\left(\frac{z}{2}\right)^p e^{ip\theta}\right]\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{i}{k\,!}\,i^k\left(\frac{z}{2}\right)^k e^{-ik\theta}\right].$$

Astfel avem

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{iz\cos\theta}e^{in\theta}d\theta=$$

$$=\sum_{p,\,k=0}^{\infty} i^{p+k}\,\frac{1}{p\,!\,k\,!}\left(\frac{z}{2}\right)^{p+k}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(p+n-k)\theta}\,d\theta.$$

Deoarece

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(p+n-k)\theta}\,d\theta=\begin{cases}0 \text{ pentru } k\neq p+n\\ 1 \text{ pentru } k=p+n\end{cases}$$

avem

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{iz\cos\theta}\,e^{in\theta}\,d\theta=\sum_{p=0}^{\infty} i^{n+2p}\,\frac{1}{p\,!\,(n+p)\,!}\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2p}=i^n J_n(z).$$

*Observaţie*. Funcţia $e^{iz\cos\theta}\,e^{in\theta}$ este periodică, de perioadă $2\pi$. Putem scrie:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{iz\cos\theta}\,e^{in\theta}\,d\theta=i^n J_n(z)$$

Înlocuind $e^{in\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$, obținem

$$i^n J_n(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{iz\cos\theta}\cos n\theta\, d\theta$$

## 19. FUNCȚIILE BESSEL DE PRIMA ȘI A DOUA SPEȚĂ MODIFICATE

Fie ecuația diferențială

$$z^2\frac{d^2y(z)}{dz^2}+\frac{dy(z)}{dz}-(z^2+\nu^2)\,y(z)=0 \tag{73}$$

Efectuînd schimbarea de variabilă $\zeta=iz$ se obține ecuația diferențială a lui Bessel.

$$\zeta^2\frac{d^2y(\zeta)}{d\zeta^2}+\xi\frac{dy(\zeta)}{d\zeta}-(\zeta^2+\nu^2)\,y(\zeta)=0$$

Soluția generală a acestei ecuații este de forma

$$AJ_\nu(\zeta)+BY_\nu(\zeta)$$

unde $A$, $B$ sînt două constante arbitrare, deci soluția generală a ecuației (73) va fi

$$AJ_\nu(iz)+BY_\nu(iz)$$

**Definiția 8.** Se numește *funcția Bessel de speța întîi modificată* funcția $I\nu$ definită prin relația

$$I_\nu(z)=i^{-\nu}J_\nu(iz) \tag{74}$$

Funcția $I_\nu$ are următoarea dezvoltare în serie:

$$I_\nu(z)=\left(\frac{z}{2}\right)^\nu\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{p!\,\Gamma(p+\nu+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2p}$$

Pentru $\nu=n$, $n$, întreg, avem

$$J_n(iz)=i^{+n}I_n(z)$$

$$J_{-n}(iz)=i^{-n}I_{-n}(z)$$

iar pe baza relației (56) avem

$$I_{-n}(z)=I_n(z)$$

**Definiția 9.** Se numește funcția Bessel de speță a doua și ordinul $\nu$, funcția $k_\nu$ definită prin:

$$k_\nu(z)=\frac{\pi}{2}\,\frac{I_{-\nu}(z)-I_\nu(z)}{\sin\pi\nu} \tag{75}$$

Se poate arăta că dacă $\nu\to n$, întreg, atunci $k_n=\lim\limits_{\nu\to n}k_\nu$ este o soluție a ecuației (73) independentă de $I_n$. Expresia funcției $k_n$ va fi dată de

$$k_n=\frac{1}{2}(-1)^n\left[\frac{\partial I_{-\nu}}{\partial\nu}-\frac{\partial I_\nu}{\partial\nu}\right]_{\nu=n}$$

Funcţia $k_\nu$ se poate exprima cu ajutorul funcţiei $H_\nu^{(1)}$ folosind prima relaţie (61). Avem :

$$H_\nu^{(1)}(iz)=i\,\frac{J_\nu(iz)e^{-i\pi\nu}-J_{-\nu}(iz)}{\sin\pi\nu}=i^{\nu+1}\,\frac{I_\nu(z)-I_{-\nu}(z)}{\sin\pi\nu}$$

de unde

$$k_\nu(z)=i^{\nu+1}\,\frac{\pi}{2}\,H_\nu^{1}(iz)$$

În electrotehnică apar adesea funcţiile lui Bessel de ordinul zero şi argument $ze^{i\frac{\pi}{4}}$, $ize^{i\frac{\pi}{4}}$.

Aceste funcţii se notează cu **ber** şi **bei** şi se numesc *funcţiile lui Thomson.* Ele se definesc prin $\mathbf{ber}\,(z)+i\,\mathbf{bei}\,(z)=J_0(ize^{i\frac{\pi}{4}})=I_0(ze^{i\frac{\pi}{4}})$

Din expresia :

$$I_0(ze^{i\frac{\pi}{4}})=\sum_{p=0}^{\infty} i^p\,\frac{1}{(p\,!)^2}\left(\frac{z}{2}\right)^{2p}$$

rezultă

$$\mathbf{ber}\,(z)=1-\frac{1}{(2\,!)^2}\left(\frac{z}{2}\right)^4+\frac{1}{(4\,!)^2}-\left(\frac{z}{2}\right)^8\ldots.$$

$$\mathbf{bei}\,(z)=\frac{1}{(1\,!)^2}\left(\frac{z}{2}\right)^2-\frac{1}{(3\,!)^2}\left(\frac{z}{2}\right)^6+\frac{1}{(5\,!)^2}\left(\frac{z}{2}\right)^{10}\ldots$$

Aceste funcţii se generalizează la funcţiile **ber** $\nu$ şi **bei** $\nu$ definite prin:

$$\mathbf{ber}_\nu(z)\pm i\,\mathbf{bei}_\nu(-z)=J_\nu(z\,e^{\pm i\frac{3\pi}{4}})$$

Analog se definesc şi funcţiile **ker**, **kei**, **ber**, **bei** prin

$$\mathbf{ker}\,(z)\pm i\,\mathbf{kei}\,(z)=k_0(-iz\,e^{\pm\frac{3\pi}{4}})$$

$$\mathbf{bei}_\nu(z)\pm i\,\mathbf{bei}_\nu(z)=H_\nu^{(1)}(z\,e^{\pm\frac{3\pi}{4}})$$

## 20. ORTOGONALITATEA FUNCŢIILOR LUI BESSEL DE PRIMA SPEŢĂ ŞI ZEROURILE

Vom da următoarea teoremă care ne va fi utilă în cele ce urmează :

**Teorema 13.** Funcţia Bessel de prima speţă $J_\nu$ cu $\mathrm{Re}\,\nu>-1$ satisface următoarea relaţie :

$$(k_2^2-k_1^2)\int_0^1 x\,J_\nu(k_1x)\,J_\nu(k_2x)\,dx=$$
$$=k_1J'_\nu(k_1)\,J_\nu(k_2)-k_2\,J^\nu(k_2)\,J_\nu(k_1) \tag{76}$$

unde $k_1, k_2$ sînt două constante reale sau complexe arbitrare.

Fie ecuațiile diferențiale:

$$x^2 y_1''(x)+xy_1'(x)+(k_1^2x^2-\nu^2)\, y_1(x)=0 \tag{77}$$

$$x^2 y_2''(x)+xy_2'(x)+(k_2^2 x^2-\nu^2)\, y_2(x)=0 \tag{78}$$

Făcînd schimbările de variabile $k_1x=z$, respectiv $k_2x=z$ se ajunge la ecuația lui Bessel (49). Ecuațiile (77) și (78) au deci drept soluții funcțiile $y_1$ respectiv $y_2$ definite prin

$$y_1(x)=J_\nu(k_1x), \quad y_2(x)=J_\nu(k_2x)$$

Din ecuațiile (77) și (78) obținem ecuația

$$x^2\,[y_1''(x)\, y_2(x)-y_1(x)\, y_2''(x)]+$$

$$x\,[y_1'(x)\, y_2(x)-y_1(x)\, y_2'(x)]+(k_1^2-k_2^2)\, x^2y_1(x)\, y_2(x)=0$$

care se poate scrie și sub forma

$$\{x\,[y_1'(x)\, y_2(x)-y_1(x)\, y_2'(x)\,]\}'=(k_1^2-k_2^2)\, xy_1(x)\cdot y_2(x)$$

Integrînd ambii membrii ai ecuației de mai sus pe intervalul [0, 1] obținem:

$$(k_2^2-k_1^2)\int_0^1 xy_1(x)\, y_2(x)\,\mathrm{d}x=x\,[y_1'(x)\, y_2\, x)-y_2'(x)\, y_1(x)]\,\Big|_0^1 .$$

Folosind expresia (53) a funcției Bessel de prima speță vom avea

$$y_1(x)=J_\nu(k_1x)=\frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{k_1x}{2}\right)^\nu+\dots$$

$$y_2(x)=J_\nu(k_2x)=\frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{k_2x}{2}\right)^\nu+\dots$$

$$y_1'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}J_\nu(k_1x)=\frac{\nu k_1}{2\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{k_1x}{2}\right)^{\nu-1}+\dots$$

$$y_2'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}J_\nu(k_2x)=\frac{k_2}{2(\nu+1)}\left(\frac{k_2x}{2}\right)^{\nu-1}+\dots$$

deci în expresia $x\,[y_1'(x)\, y_2(x)-y_2'(x)\, y_1(x)]_{x=0}$ termenul obținut luînd primul termen din fiecare serie este nul și $x^{2\nu+2}$ apare ca factor comun. Atunci $x\,[y_1'(x)\, y_2(x)-y_2'(x)\, y_1(x)]\,|_{x=0}=0$ pentru $\mathbf{Re}\,\nu>-1$.

Ținînd seama că

$$y_1'(x)\,|_{x=1}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,[J_\nu(k_1x)]\,|_{x=1}=k_1J_\nu'(k_1), \quad y_2'(x)\,|_{x=1}=k_2J_\nu'(k_2)$$

rezultă relația (76).

**Teorema 14.** Pentru $\nu\in\mathbf{R}$ și $\nu>-1$, toate zerourile funcției $J_\nu$ sînt reale.

Pentru $\nu \in R$, coeficienţii seriei din expresia (53) a funcţiei $J_\nu$ sînt reali. Presupunînd că $z_1=a+ib$ este o rădăcină a ecuaţiei $J_\nu(z)=0$, ea va admite şi rădăcina $z_2=a-ib$. Înlocuind în (76) $k_1=z_1$ şi $k_2=z_2$, obţinem

$$-4iab\int_0^1 x\, J_\nu\,[(a+ib)\,x]\; J_\nu\,[(a-ib)\,x]\cdot dx=0 \tag{79}$$

Deoarece $J_\nu\,[(a+ib)\,x]$ şi $J_\nu\,[(a-ib)\,x]$ sînt complex conjugate, expresia de sub semnul integralei este pozitivă şi fiind continuă rezultă că egalitatea (79) are loc numai pentru $a=0$ sau $b=0$.

Dacă $a=0$ ar rezulta că $J_\nu(z)=0$ are rădăcini pur imaginare adică

$$J_\nu(ib)=\left(\frac{ib}{2}\right)^\nu \sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p\frac{i^{2\nu}\,b^{2p}}{2^{2p}\,p!\,\Gamma(\nu+p+1)}=0$$

pentru $b\neq 0$ rezultă

$$\sum_{p=0}^{\infty}\frac{b^{2p}}{2^{2p}\,p!\,\Gamma(\nu+p+1)}=0$$

ceea ce este imposibil, toţi termenii seriei fiind strict pozitivi pentru $\nu>-1$.

Relaţia (79) este deci satisfăcută numai pentru $b=0$ ceea ce demonstrează teorema.

Cu privire la zerourile funcţiei $J_\nu$ dăm următoarea teoremă fără demonstraţie.

**Teorema 15.** Ecuaţia $J_\nu(z)=0$ are o infinitate de rădăcini reale.

*Observaţie.* Din expresia (53) a funcţiei $J_\nu$ rezultă că rădăcinile ecuaţiei $J_\nu(z)=0$ sînt două cîte două simetrice faţă de origine.

Considerăm un şir de rădăcini ale ecuaţiei $J_\nu(z)=0$

$$k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots \text{ cu } k_i^2\neq k_j^2 \text{ pentru } i\neq j$$

**Teorema 16.** Şirul de funcţii $\varphi_i$ definite prin

$$\varphi_i(x)=J_\nu(k_i x)$$

este un şir ortogonal de funcţii în raport cu ponderea $\rho$ pe $[0, 1]$, unde $\rho(x)\equiv x$ şi

$$\int_0^1 xJ_\nu(k_i x)\,J_\nu(k_j x)\,dx=\begin{cases}0 & \text{pentru } i\neq j\\ \dfrac{1}{2}J_\nu'^2(k_j)=\dfrac{1}{2}J_{\nu+1}^2(k_j) & \text{pentru } i=j\end{cases}$$

Pentru a demonstra teorema luăm în relaţia (76) $k_1=k_i$, $k_2=k_j$ şi avem

$$\int_0^1 xJ_\nu(k_i x)\,J_\nu(k_j x)\,dx=\frac{k_i J_\nu'(k_i)J_\nu(k_j)-J_\nu'(k_j)\,J_\nu(k_i)}{k_j^2-k_i^2}$$

Cum $J_\nu(k_i)=0$, $J_\nu(k_j)=0$ obţinem zero pentru $i\neq j$.

Pentru $i=j$, în membrul stîng obținem o nedeterminare de forma $\frac{0}{0}$. Vom calcula atunci limita membrului stîng pentru $k_i \to k_j$ cu ajutorul regulei lui l'Hôspital ; avem :

$$\lim_{k_i \to k_j} \frac{J'_\nu(k_i)\, J_\nu(k_j) + k_i\, J''_\nu(k_i)\, J_\nu(k_j) - k_j\, J'_\nu(k_i)\, J'_\nu(k_i)}{-2k_i} = \frac{1}{2} J'_\nu(k_j)$$

Înlocuind în relațiile (63) pe $z$ cu $k_j$ și ținînd cont că $J_\nu(k_j)=0$ obținem

$$J_{\nu-1}(k_j) + J_{\nu+1}(k_j) = 0, \quad J_{\nu-1}(k_j) - J_{\nu+1}(k_j) = 2J'_\nu(k_j)$$

de unde

$$J_{\nu-1}(k_j) = -J_{\nu+1}(k_j) = J'_\nu(k_j)$$

deci

$$\int_0^1 x J_\nu^2(k_j x)\, dx = \frac{1}{2} J'^2_\nu(k_j) = \frac{1}{2} J^2_{\nu+1}(k_j) = \frac{1}{2} J^2_{\nu-1}(k_j)$$

Funcțiile Bessel au o serie de aplicații cum sînt : în studiul oscilațiilor unui fir greu suspendat la un capăt, a unor mișcări determinate prin ecuația lui Laplace, propagarea unei unde electromagnetice în interiorul unui cilindru de rotație infinit etc.